

УДК 517.927, 517.968, 519.6

Ю. Г. Смирнов, С. Н. Куприянова, Д. В. Валовик

О РАСПРОСТРАНЕНИИ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН В ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ НЕОДНОРОДНЫХ ДИЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ВОЛНОВОДАХ, ЗАПОЛНЕННЫХ НЕЛИНЕЙНОЙ СРЕДОЙ¹

Аннотация. Исследуются поверхностные электромагнитные ТЕ-волны, распространяющиеся в неоднородном диэлектрическом волноводе кругового сечения, заполненного средой с нелинейностью, выраженной законом Керра. Проблема сводится к нелинейному интегральному уравнению. Ядро интегрального уравнения выражается через функцию Грина линейного дифференциального оператора. Существование распространяющихся ТЕ-поляризованных волн доказывается с помощью принципа Шаудера и методом сжимающих отображений. Для численного решения задачи предложен итерационный алгоритм, доказана его сходимость. Доказано существование корней дисперсионного уравнения – постоянных распространения волновода. Получены условия, когда могут распространяться k -волны, указаны области локализации соответствующих постоянных распространения.

Ключевые слова: уравнения Максвелла, электромагнитные ТЕ-волны, круглый цилиндрический волновод, неоднородная нелинейная диэлектрическая проницаемость, нелинейное интегральное уравнение, задача на собственные значения.

Abstract. The article investigates surface electromagnetic TE waves propagating along the axis of an inhomogeneous dielectric nonlinear cylindrical waveguide. The nonlinearity inside the waveguide is described by Kerr law. Physical problem is reduced to a nonlinear integral equation. The kernel of the integral equation is the Green function for a linear differential operator. Existence of surface waves is proved with the help of the Schauder principle and the contraction method. For numerical solution of the problem an iteration method is suggested. Convergence of the numerical method is proved. It is also proved that the roots of the dispersion equation exist. These roots are propagation constants. Conditions when k propagating modes exist are found. Domains of localization of the propagation constants are given.

Key words: Maxwell's equations, electromagnetic TE waves, circle cylindrical waveguide, inhomogeneous nonlinear permittivity, nonlinear integral equation, boundary eigenvalue problem.

Распространение светового луча в однородной нелинейной среде или в волноведущей структуре с нелинейной средой, описываемой по закону Керра, активно исследуется в течение последних двух десятилетий [1–8]. Эффекты самофокусировки и «самоканализации» луча в лазерах и оптоэлектронных устройствах также изучаются и применяются на практике [8–11].

¹ Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант № 11-01-00330) и Гранта Президента РФ (МК-2074.2011.1).

Распространение ТЕ-поляризованных волн в трехслойной среде без потерь, один из слоев которой заполнен нелинейной средой, подробно исследовано в [1]. В этих работах были получены аналитические решения соответствующих дифференциальных уравнений, выраженные с помощью эллиптических функций, а также представлены численные результаты расчетов. Однако при изучении других структур, например круглого диэлектрического волновода, уже не удастся получить аналитические решения, но возможно применение численных методов. Кроме того, для анализа вопроса о существовании и единственности решений краевой задачи приходится привлекать методы функционального анализа исследования нелинейных операторов. Работа является развитием [3, 4] на случай, когда распространяются m -волны в волноводе.

1. Постановка задачи

Рассмотрим задачу о собственных волнах цилиндрического диэлектрического волновода. Пусть все трехмерное пространство $\mathbb{R}^3$ заполнено изотропной средой без источников с $\varepsilon = \varepsilon_1$ ($= \text{const}$). В эту среду помещен цилиндрический диэлектрический волновод однородного заполнения с образующей, параллельной оси Oz , и поперечным сечением

$$W := \left\{ x : \rho := \sqrt{x_1^2 + x_2^2} < R \right\}.$$

Пусть диэлектрическая проницаемость ε внутри цилиндра определяется по закону Керра:

$$\varepsilon = \varepsilon_2(\rho) + a|\mathbf{E}|^2,$$

где a – вещественная положительная константа и $\min_{\rho \in [0, R]} \varepsilon_2(\rho) > \varepsilon_1$. Здесь

$\varepsilon_2(\rho)$ – линейная составляющая проницаемости ε ; a – коэффициент нелинейности.

Требуется отыскать поверхностные волны, распространяющиеся вдоль образующей волновода, т.е. собственные волны структуры.

Электромагнитное поле $\mathbf{E}$, $\mathbf{H}$ удовлетворяет системе уравнений Максвелла:

$$\begin{aligned} \text{rot } \mathbf{H} &= -i\omega \varepsilon \mathbf{E}, \\ \text{rot } \mathbf{E} &= i\omega \mu \mathbf{H}, \end{aligned} \quad (1)$$

условиям непрерывности касательных составляющих поля H_τ и E_τ при переходе через границу волновода и условиям затухания поля на бесконечности.

Перейдем к цилиндрической системе координат (ρ, φ, z) .

В случае ТЕ-поляризации имеем

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= (0, E_\varphi, 0)^T, \\ \mathbf{H} &= (H_\rho, 0, H_z)^T. \end{aligned}$$

В результате уравнения Максвелла (1) примут вид

$$\begin{cases} -\frac{\partial E_\varphi}{\partial z} = i\omega\mu H_\rho, \\ \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho E_\varphi) = i\omega\mu H_z, \\ \frac{1}{\rho} \frac{\partial H_z}{\partial \varphi} = 0, \\ \frac{\partial H_\rho}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial \rho} = -i\omega\varepsilon E_\varphi, \\ -\frac{1}{\rho} \frac{\partial H_\rho}{\partial \varphi} = 0. \end{cases} \quad (2)$$

Из третьего и пятого уравнений (2) следует, что $H_z = H_z(\rho, z)$ и $H_\rho = H_\rho(\rho, z)$ не зависят от φ . Из первого и второго уравнений (2) находим $H_\rho = -\frac{1}{i\omega\mu} \frac{\partial E_\varphi}{\partial z}$, $H_z = \frac{1}{i\omega\mu} \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho E_\varphi)$. Подстановка H_ρ и H_z в четвертое уравнение (2) дает

$$\frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho E_\varphi) \right) + \frac{\partial^2 E_\varphi}{\partial z^2} + \omega^2 \varepsilon \mu E_\varphi = 0.$$

Решение задачи будем искать в форме осесимметричных волн $E_\varphi(\rho, z) = u(\rho) e^{i\gamma z}$, где γ – неизвестный спектральный параметр. Таким образом, последнее уравнение может быть переписано в виде

$$\left(\frac{1}{\rho} (\rho u)' \right)' + (\omega^2 \varepsilon \mu - \gamma^2) u = 0, \quad (3)$$

где производная означает дифференцирование по ρ .

Во внешней области, учитывая, что $\varepsilon = \varepsilon_1$, получаем уравнение Бесселя:

$$u'' + \frac{1}{\rho} u' - \frac{1}{\rho^2} u + k_1^2 u = 0, \quad \rho > R, \quad (4)$$

где $k_1^2 = \omega^2 \varepsilon_1 \mu - \gamma^2$.

Внутри волновода, где $\varepsilon = \varepsilon_2(\rho) + \alpha |E|^2$, получаем нелинейное дифференциальное уравнение второго порядка:

$$u'' + \frac{1}{\rho} u' - \frac{1}{\rho^2} u + k^2(\rho) u + \alpha u^3 = 0, \quad \rho < R, \quad (5)$$

где $\alpha = a\omega^2 \mu$, $k^2(\rho) = k_2^2(\rho) - \gamma^2$, $k_2^2(\rho) = \omega^2 \varepsilon_2(\rho) \mu$.

Условия сопряжения на поверхности волновода преобразуются к виду $[E_\varphi]_{\rho=R} = 0$ и $[H_z]_{\rho=R} = 0$, что дает

$$[u]_{\rho=R} = 0 \text{ и } [u']_{\rho=R} = 0, \quad (6)$$

где $[v]_{\rho=R} = v(R-0) - v(R+0)$ – скачок предельных значений функции в точке R .

Сформулируем теперь краевую задачу на собственные значения, к которой свелась исходная задача о распространяющихся поверхностных волнах цилиндрического волновода (*задача P*). Требуется отыскать ненулевую функцию $u(\rho)$ и соответствующие собственные значения γ такие, что $u(\rho)$ удовлетворяет уравнениям (4), (5), условиям сопряжения (6) и условиям экспоненциального убывания функции $u(\rho)$ на бесконечности при $\rho \rightarrow \infty$.

Запишем решение уравнения Бесселя (4) в виде $u = C_1 H_1^{(1)}(k_1 \rho)$, $\rho > R$, где C_1 – константа, $H_1^{(1)}$ – функция Ханкеля. Если $\operatorname{Re} k = 0$, то

$$u = C_1 K_1(|k_1| \rho), \quad \rho > R, \quad (7)$$

где K_1 – функция Макдональда. Условия излучения выполняются, потому что $K_1(|k_1| \rho) \rightarrow 0$ экспоненциально при $\rho \rightarrow \infty$.

2. Нелинейное интегральное уравнение

Рассмотрим нелинейное дифференциальное уравнение (5), записанное в виде

$$(\rho u')' + \left(k^2(\rho) \rho - \frac{1}{\rho} \right) u + \alpha \rho u^3 = 0,$$

и линейное уравнение

$$(\rho u')' + \left(k^2(\rho) \rho - \frac{1}{\rho} \right) u = 0.$$

Перепишем последнее уравнение в операторной форме:

$$Lu = 0, \quad L = \rho \frac{d^2}{d\rho^2} + \frac{d}{d\rho} + \left(k^2(\rho) \rho - \frac{1}{\rho} \right).$$

Предположим, что существует функция Грина $G(\rho, \rho_0; \lambda)$ краевой задачи:

$$LG = -\delta(\rho - \rho_0), \quad G|_{\rho=0} = G'|_{\rho=R} = 0 \quad (0 < \rho_0 < R),$$

тогда в окрестности собственного значения λ_i она может быть представлена в следующем виде (см., например, [12]):

$$G(\rho, \rho_0; \lambda) = -\frac{v_i(\rho)v_i(\rho_0)}{\lambda - \lambda_i} + G_1(\rho, \rho_0; \lambda), \quad (8)$$

где $\lambda := \gamma^2$; $G_1(\rho, \rho_0; \lambda)$ регулярна в окрестности точки λ_i ; $\lambda_n, v_n(\rho)$ – полная система ортонормированных (вещественных) собственных чисел и собственных функций краевой задачи

$$\rho v_n'' + v_n' + \left(k_2^2(\rho)\rho - \frac{1}{\rho} \right) v_n = \lambda_n \rho v_n, \quad v_n|_{\rho=0} = v_n'|_{\rho=R} = 0.$$

Функция Грина существует при таких значениях параметров, когда $\lambda \neq \lambda_n$.

Запишем уравнение (5) в операторном виде:

$$Lu + \alpha B(u) = 0, \quad B(u) = \rho u^3. \quad (9)$$

Используя вторую формулу Грина

$$\int_0^R (vLu - uLv) d\rho = \int_0^R \left(v(\rho u')' - u(\rho v')' \right) d\rho = R(u'(R)v(R) - v'(R)u(R))$$

и полагая $v = G$, получаем

$$\begin{aligned} \int_0^R (GLu - uLG) d\rho &= R(u'(R-0) G(R, \rho_0) - G'(R, \rho_0) u(R-0)) = \\ &= Ru'(R-0) G(R, \rho_0). \end{aligned}$$

Используя уравнение (9), получаем интегральное представление решения $u(\rho_0)$ уравнения (5) на отрезке $[0, R]$:

$$u(\rho_0) = \alpha \int_0^R G(\rho, \rho_0) \rho u^3(\rho) d\rho + Ru'(R-0) G(R, \rho_0), \quad 0 \leq \rho_0 \leq R. \quad (10)$$

Принимая во внимание условия сопряжения $u'(R-0) = u'(R+0)$, перепишем уравнение (10) в виде

$$u(\rho_0) = \alpha \int_0^R G(\rho, \rho_0) \rho u^3(\rho) d\rho + f(\rho_0), \quad 0 \leq \rho_0 \leq R, \quad (11)$$

где $f(\rho_0) = Ru'(R+0)G(R, \rho_0)$.

Из уравнения (11) и условий сопряжения $u(R-0) = u(R+0)$ следует дисперсионное соотношение

$$u(R+0) = \alpha \int_0^R G(\rho, R) \rho u^3(\rho) d\rho + Ru'(R+0)G(R, R). \quad (12)$$

Положим $N(\rho, \rho_0; \lambda) = \alpha G(\rho, \rho_0; \lambda) \rho$ и рассмотрим интегральное уравнение

$$u(\rho_0) = \int_0^R N(\rho, \rho_0) u^3(\rho) d\rho + f(\rho_0) \quad (13)$$

в пространстве $C[0, R]$.

Предполагается, что $f \in C[0, R]$ и $\lambda \neq \lambda_n$. Нетрудно видеть, что ядро $N(\rho, \rho_0)$ является непрерывной функцией в квадрате $0 \leq \rho, \rho_0 \leq R$.

Рассмотрим в $C[0, R]$ линейный интегральный оператор

$$Nw = \int_0^R N(\rho, \rho_0) w(\rho) d\rho. \quad (14)$$

Он ограничен, вполне непрерывен и

$$\|N\| = \max_{\rho_0 \in [0, R]} \int_0^R |N(\rho, \rho_0)| d\rho. \quad (15)$$

Поскольку нелинейный оператор $B_0(u) = u^3(\rho)$ ограничен и непрерывен в $C[0, R]$, то нелинейный оператор

$$F(u) = \int_0^R N(\rho, \rho_0) u^3(\rho) d\rho + f(\rho_0) \quad (16)$$

является вполне непрерывным на каждом ограниченном множестве в $C[0, R]$.

В последующих рассуждениях нам понадобится следующее вспомогательное числовое кубическое уравнение:

$$\|N\| r^3 + \|f\| = r, \quad (17)$$

где норма оператора $\|N\| > 0$ определяется формулой (16), а

$$\|f\| = \max_{\rho_0 \in [0, R]} |f(\rho_0)|.$$

Рассмотрим уравнение

$$r - \|N\| r^3 = \|f\| \quad (18)$$

и функцию $y(r) := r - \|N\| r^3$.

Функция $y(r)$ имеет только одну положительную точку максимума

$$r_{\max} = \frac{1}{\sqrt{3\|N\|}}, \text{ значение в которой равно } y_{\max} = y(r_{\max}) = \frac{2}{3\sqrt{3\|N\|}}.$$

Тогда при условии $0 \leq \|f\| < \frac{2}{3} \frac{1}{\sqrt{3\|N\|}}$ уравнение (18) имеет два неотрицательных корня r_* и r^* , $r_* \leq r^*$, удовлетворяющих неравенствам $0 \leq r_* \leq \frac{1}{\sqrt{3\|N\|}}$; $\frac{1}{\sqrt{3\|N\|}} \leq r^* \leq \frac{1}{\sqrt{\|N\|}}$.

Эти корни нетрудно выписать как решения кубического уравнения:

$$r^3 - \frac{1}{\sqrt{\|N\|}} r + \frac{\|f\|}{\|N\|} = 0.$$

Имеем

$$\begin{aligned} r_* &= -2\sqrt{\frac{1}{3\|N\|}} \cos\left(\frac{1}{3} \arccos\left(\frac{3\sqrt{3}}{2}\|f\|\sqrt{\|N\|}\right) - \frac{2\pi}{3}\right), \\ r^* &= -2\sqrt{\frac{1}{3\|N\|}} \cos\left(\frac{1}{3} \arccos\left(\frac{3\sqrt{3}}{2}\|f\|\sqrt{\|N\|}\right) + \frac{2\pi}{3}\right). \end{aligned} \quad (19)$$

Если $\|f\| = 0$, то $r_* = 0$ и $r^* = \frac{1}{\sqrt{\|N\|}}$; если $0 < \|f\| < \frac{2}{3} \frac{1}{\sqrt{3\|N\|}}$, то

$$r_* < \frac{1}{\sqrt{3\|N\|}}. \quad (20)$$

При $\|f\| = \frac{2}{3} \frac{1}{\sqrt{3\|N\|}}$ имеем $r_* = r^* = \frac{2}{3} \frac{1}{\sqrt{3\|N\|}}$.

Итак, доказано следующее утверждение.

Лемма 1. Если выполняется неравенство

$$0 \leq \|f\| < \frac{2}{3} \frac{1}{\sqrt{3\|N\|}}, \quad (21)$$

то уравнение (17) имеет два неотрицательных решения r_* и r^* , $r_* < r^*$.

Используя принцип Шаудера [13–15], можно доказать, что для каждого $f \in S_\rho(0) \subset C[0, R]$, где $\hat{\rho} = \frac{2}{3} \frac{1}{\sqrt{3\|N\|}}$, существует решение $u(\rho)$ уравнения

(13) внутри шара $S^* = S_{r^*}(0)$.

Лемма 2. Если $\|f\| \leq \frac{2}{3} \frac{1}{\sqrt{3\|N\|}}$, то уравнение (13) имеет по крайней мере

одно решение и $\|u\| \leq r^*$.

Доказательство. Так как $F(u)$ абсолютно непрерывен, необходимо только проверить, что F переводит шар в себя. Предположим, что $u \in S^*$. Используя (14)–(16), получаем

$$\|F(u)\| \leq \|N\| \cdot \|u\|^3 + \|f\| \leq \|N\| (r^*)^3 + \|f\| = r^*.$$

Это означает, что $FS^* \subset S^*$. Лемма доказана. #

Теперь докажем, что если выполняется условие (18), то (13) имеет единственное решение u в шаре $S_* = S_{r^*}$.

Теорема 1. Если $\alpha \leq A^2$, где $A = \frac{2}{3} \frac{1}{\|f\| \sqrt{3\|N_0\|}}$ и

$$\|N_0\| = \max_{\rho \in [0, R]} |\rho G(\rho, \rho_0)|, \text{ то уравнение (14) имеет единственное решение } u,$$

которое является непрерывной функцией: $u \in C[0, R]$, $\|u\| \leq r_*$.

Доказательство. Если $u \in S_*$, то

$$\|F(u)\| \leq \|N\| \cdot \|u\|^3 + \|f\| \leq \|N\| (r^*)^3 + \|f\| = r^*.$$

Если $u_1, u_2 \in S_*$, то

$$\|F(u_1) - F(u_2)\| = \left\| \int_0^R N(\rho, \rho_0) (u_1^3(\rho) - u_2^3(\rho)) d\rho \right\| \leq 3Nr_*^2 \|u_1 - u_2\|.$$

Так как $\alpha \leq A^2$, то $f(\rho_0)$ удовлетворяет условию (21). Поэтому выполняется неравенство (20), откуда $3\|N\|r_*^2 < 1$.

Следовательно, F отображает S_* в себя и является сжимающим оператором на S_* . Поэтому уравнение (13) имеет единственное решение в S_* . Теорема доказана. #

Отметим, что $A > 0$ и не зависит от α .

В дальнейшем нам понадобится утверждение о зависимости решений интегрального уравнения (13) от параметра.

Теорема 2. Пусть ядро N и правая часть f интегрального уравнения (13) непрерывно зависят от параметра $\lambda \in \Lambda_0$, $N(\lambda, \rho, \rho_0) \subset C(\Lambda_0 \times [0, R] \times [0, R])$, $f(\lambda, \rho_0) \subset C(\Lambda_0 \times [0, R])$, на некотором отрезке Λ_0 вещественной числовой оси. Пусть также

$$0 < \|f(\lambda)\| < \frac{2}{3} \frac{1}{\sqrt{3\|N(\lambda)\|}}. \quad (22)$$

Тогда решения $u(\lambda, \rho)$ уравнения (13) при $\lambda \in \Lambda_0$ существуют, единственны и непрерывно зависят от параметра λ , $u(\lambda, \rho) \subset C(\Lambda_0 \times [0, R])$.

Доказательство. Рассмотрим уравнение

$$u(\rho_0, \lambda) = \int_0^R N(\lambda, \rho, \rho_0) u^3(\rho, \lambda) d\rho + f(\rho_0, \lambda).$$

Существование и единственность решений $u(\lambda)$ при условиях теоремы 2 следует из теоремы 1. #

Докажем непрерывную зависимость этих решений от параметра λ .

Нетрудно видеть из формулы (19), что $r_*(\lambda)$ непрерывно зависит от λ на отрезке Λ_0 . Пусть $r_0 = \max_{\lambda \in \Lambda_0} r_*(\lambda)$ и максимум достигается в точке λ_0 , $r_*(\lambda) = r_0$.

Далее, пусть $Q = \max_{\lambda \in \Lambda_0} (3r_*^2(\lambda) \|N(\lambda)\|)$ и максимум достигается в точке $\hat{\lambda} \in \Lambda_0$, $Q = 3r_*^2(\hat{\lambda}) \|N(\hat{\lambda})\|$. Тогда $Q < 1$ в силу условия (22) теоремы.

Предположим сначала, что $\|u(\lambda)\| \geq \|u(\lambda + \Delta\lambda)\|$. Тогда имеют место следующие оценки:

$$\begin{aligned} |u(\rho_0, \lambda + \Delta\lambda) - u(\rho_0, \lambda)| &= \left| \int_0^R N(\lambda + \Delta\lambda, \rho, \rho_0) u^3(\rho, \lambda + \Delta\lambda) d\rho - \right. \\ &\quad \left. - \int_0^R N(\lambda, \rho, \rho_0) u^3(\rho, \lambda) d\rho + (f(\rho_0, \lambda + \Delta\lambda) - f(\rho_0, \lambda)) \right| \leq \\ &\leq \int_0^R |N(\lambda + \Delta\lambda, \rho, \rho_0) - N(\lambda, \rho, \rho_0)| \cdot |u(\lambda_0, \lambda, \Delta\lambda)|^3 d\rho + \\ &+ \int_0^R |N(\lambda, \rho, \rho_0)| \cdot |u^3(\rho, \lambda + \Delta\lambda) - u^3(\rho, \lambda)| d\rho + |f(\rho_0, \lambda + \Delta\lambda) - f(\rho_0, \lambda)| \leq \\ &\leq \|u(\lambda + \Delta\lambda)\|^3 \int_0^R |N(\lambda + \Delta\lambda, \rho, \rho_0) - N(\lambda, \rho, \rho_0)| d\rho + \\ &+ \|u(\lambda + \Delta\lambda) - u(\lambda)\| \left(\|u(\lambda + \Delta\lambda)\|^2 + \|u(\lambda + \Delta\lambda)\| \cdot \|u(\lambda)\| + \|u(\lambda)\|^2 \right) \times \\ &\times \int_0^R |N(\lambda, \rho, \rho_0)| d\rho + \|f(\lambda + \Delta\lambda) - f(\lambda)\| \leq r_0^3 \|N(\lambda + \Delta\lambda) - N(\lambda)\| + \\ &+ \|u(\lambda + \Delta\lambda) - u(\lambda)\| 3r_*^2(\lambda) \|N(\lambda)\| + \|f(\lambda + \Delta\lambda) - f(\lambda)\|. \end{aligned}$$

Отсюда получаем, что

$$\|u(\lambda + \Delta\lambda) - u(\lambda)\| \leq \frac{r_0^3 \|N(\lambda + \Delta\lambda) - N(\lambda)\| + \|f(\lambda + \Delta\lambda) - f(\lambda)\|}{1 - 3r_*^2(\lambda) \|N(\lambda)\|}$$

и

$$\|u(\lambda + \Delta\lambda) - u(\lambda)\| \leq \frac{r_0^3 \|N(\lambda + \Delta\lambda) - N(\lambda)\| + \|f(\lambda + \Delta\lambda) - f(\lambda)\|}{1 - Q}, \quad (23)$$

где Q и r_0 не зависят от λ .

Пусть теперь $\|u(\lambda)\| < \|u(\lambda + \Delta\lambda)\|$. Тогда все предыдущие оценки остаются в силе, если заменить аргументы λ на $\lambda + \Delta\lambda$, а $\lambda + \Delta\lambda$ на λ . Таким образом, оценка (23) также остается в силе, откуда следует утверждение теоремы. Теорема доказана. #

3. Итерационный метод

Приближенные решения u_n интегрального уравнения (13), представимого в виде $u = F(u)$, могут быть определены итерационным процессом $u_{n+1} = F(u_n)$, $n = 0, 1, 2, \dots$:

$$u_0 = 0, \quad u_{n+1} = \alpha \int_0^R G(\rho, \rho_0) \rho u_n^3 d\rho + f, \quad n = 0, 1, \dots \quad (24)$$

Последовательность u_n равномерно сходится к решению u уравнения (13) вследствие того, что $F(u)$ – сжимающий оператор. Известна также оценка для скорости сходимости итерационного алгоритма (24). Сформулируем эти результаты в виде следующего утверждения.

Утверждение 1. Последовательность приближенных решений u_n уравнения (13), определяемых посредством итерационного алгоритма (24), существует и сходится в норме пространства $C[0, R]$ к (единственному) точному решению u этого уравнения, и верна оценка скорости сходимости:

$$\|u_n - u\| \leq \frac{q^n}{1 - q} f(u_0), \quad n \rightarrow \infty, \quad \text{где } q := 3Nr_*^2 < 1 \text{ – коэффициент сжатия отображения } F.$$

4. Существование решений дисперсионного уравнения

Вводя безразмерные переменные и постоянные

$$\begin{aligned} \tilde{\rho} &= k_0 \rho, \quad \tilde{z} = k_0 z, \quad \tilde{R} = k_0 R, \quad \tilde{\epsilon} = \epsilon / \epsilon_0, \quad \tilde{\mu} = \mu / \mu_0 = 1, \\ \tilde{k}_2 &= \sqrt{\tilde{\epsilon}_2 - \tilde{\gamma}^2}, \quad k_1 = \sqrt{\tilde{\gamma}^2 - \epsilon_2} \quad (\tilde{\epsilon}_2 > \tilde{\epsilon}_1), \quad \tilde{\gamma} = \gamma / k_0, \quad \tilde{\alpha} = \alpha C_1^2 / \epsilon_0, \\ \tilde{u} &= u / C_1, \quad k_0 = \tilde{\omega}^2 \epsilon_0 \tilde{\mu}_0, \end{aligned}$$

опуская тильду и принимая во внимание (7), дисперсионное соотношение (12) можно представить в нормализованной форме:

$$K_1(|k_1|R) - |k_1| R K_1'(|k_1|R) G(R, R; \lambda) = \alpha \int_0^R G(\rho, R; \lambda) \rho u^3(\rho) d\rho. \quad (25)$$

Из свойств цилиндрических функций следует, что

$$-|k_1|RK_1'(|k_1|R) = |k_1|RK_0(|k_1|R) + K_1(|k_1|R).$$

Тогда мы можем переписать дисперсионное уравнение (25) в другой форме:

$$g(\lambda) = \alpha F(\lambda),$$

где

$$g(\lambda) = K_1(|k_1|R) + (|k_1|RK_0(|k_1|R) + K_1(|k_1|R))G(R, R; \lambda),$$

$$F(\lambda) = \int_0^R G(\rho, R; \lambda) \rho u^3(\rho) d\rho.$$

Нули функции $\Phi(\lambda) \equiv g(\lambda) - \alpha F(\lambda)$ – это значения λ , для которых существует нетривиальное решение задачи P , сформулированной ранее.

Рассмотрим вопрос о существовании решений дисперсионного уравнения для линейной задачи: $g(\lambda) = 0$.

Это уравнение можно переписать в виде

$$G(R, R; \lambda) = -\frac{K_1(|k_1|R)}{|k_1|RK_0(|k_1|R) + K_1(|k_1|R)}.$$

Из выражения $G(R, R; \lambda) = -\frac{v_i^2(R)}{\lambda - \lambda_i} + G_1(R, R; \lambda)$ ясно, что $G(R, R; \lambda)$ непрерывно изменяется от $-\infty$ до $+\infty$ при изменении λ от λ_{i-1} до λ_i . Поскольку величина $\frac{K_1(|k_1|R)}{|k_1|RK_0(|k_1|R) + K_1(|k_1|R)}$ остается ограниченной, то это означает, что между двумя последовательными собственными числами λ_i и λ_{i+1} существует по крайней мере одно решение уравнения $g(\lambda) = 0$.

Еще необходимо показать, что в выражении $G(R, R; \lambda)$ член $v_i(R)$ не обращается в нуль. Это легко сделать методом от противного. Предположим, что $v_i(R) = 0$. Тогда рассмотрим задачу Коши для уравнения

$$\rho v_i'' + v_i' + \left(k_2^2(\rho)\rho - \frac{1}{\rho}\right)v_i = \lambda_i \rho v_i \text{ с начальными условиями } v_i|_{\rho=R} = v_i'|_{\rho=R} = 0$$

при $\rho \in [\delta, R]$, где $\delta > 0$. Из общей теории обыкновенных дифференциальных уравнений (см., например, [16]) известно, что решение $v_i(\rho)$ рассматриваемой задачи Коши существует и единственно при $\rho \in [\delta, R]$. В таком случае при $\rho \in [\delta, R]$ это решение совпадает с функцией $v_i(\rho)$, участвующей в представлении (8) функции Грина. С другой стороны, решение задачи Коши для

линейного уравнения с нулевыми начальными данными является тождественным нулем. А это противоречит представлению (8) функции Грина $G(\rho, \rho_0; \lambda)$ в окрестности точки $\lambda = \lambda_i$.

Теперь можно показать, что существуют решения уравнения $\Phi(\lambda) = 0$.

Действительно, пусть существует такое целое число $k \geq 1$, что справедливо $\varepsilon_1 < \lambda_0 < \lambda_1 < \dots < \lambda_{k-1} < \lambda_k < \varepsilon_2$, где $\varepsilon_2 = \min_{\rho \in [0, R]} \varepsilon_2(\rho)$. Выберем доста-

точно малые числа $\delta_i > 0$ такие, что на объединении $\Gamma := \bigcup_{i=1}^k \Gamma_i$ отрезков

$\Gamma_i := [\sqrt{\lambda_{i-1}} + \delta_{i-1}, \sqrt{\lambda_i} - \delta_i]$, $i = \overline{1, k}$, функция Грина $G(\rho, \rho_0; \lambda)$ существует и непрерывна, а также выполняется $g(\sqrt{\lambda_{i-1}} + \delta_{i-1})g(\sqrt{\lambda_i} - \delta_i) < 0$. Отсюда ясно, что величина $F(\lambda)$ ограничена. Более того, за счет выбора величины α произведение $\alpha F(\lambda)$ может быть сделано достаточно малым. Рассмотрим дисперсионное уравнение $\Phi(\lambda) = 0$. Ясно, что функция $g(\lambda)$ непрерывна и меняет знак при изменении λ от $\lambda_{i-1} + \delta_{i-1}$ до $\lambda_i - \delta_i$. Поскольку величина $F(\lambda)$ ограничена при изменении λ от $\lambda_{i-1} + \delta_{i-1}$ до $\lambda_i - \delta_i$, то отсюда ясно, что за счет выбора α всегда можно добиться того, что уравнение $\Phi(\lambda) = 0$ будет иметь по крайней мере k корней $\tilde{\lambda}_i$, $i = \overline{1, k}$, причем $\tilde{\lambda}_i \in (\lambda_{i-1} + \delta_{i-1}, \lambda_i - \delta_i)$, $i = \overline{1, k}$.

На основе проведенных рассуждений может быть сформулирована следующая теорема.

Теорема 3. Пусть числа ε_1 , $\varepsilon_2 = \min_{\rho \in [0, R]} \varepsilon_2(\rho)$, α удовлетворяют

условию $\varepsilon_2 > \varepsilon_1 > 0$ и существует целое число $k \geq 1$, что справедливо $\varepsilon_1 < \lambda_0 < \lambda_1 < \dots < \lambda_{k-1} < \lambda_k < \varepsilon_2$. Тогда существует число $\alpha_0 > 0$ такое, что для всякого $\alpha \leq \alpha_0$ существует по крайней мере k значений γ_i , $i = \overline{1, k}$, причем $\gamma_i \in (\sqrt{\lambda_{i-1}} + \delta_{i-1}, \sqrt{\lambda_i} - \delta_i)$, таких, что задача P имеет нетривиальное решение.

Доказательство. Функция Грина существует для всех $\gamma \in \Gamma$. Также ясно,

что функция $A(\gamma) = \frac{2}{3\|f(\gamma)\|\sqrt{3}\|N_0(\gamma)\|}$ является непрерывной функцией

при $\gamma \in \Gamma$. Пусть $A_1 = \min_{\gamma \in \Gamma} A(\gamma)$ и пусть $\alpha < A_1^2$. В соответствии с теоремой 1

существует единственное решение $u = u(\gamma)$ уравнения (13) для всякого $\gamma \in \Gamma$. Это решение является непрерывной функцией и $\|u\| \leq r_* = r_*(\gamma)$. Пусть

$r_{00} = \max_{\gamma \in \Gamma} r_*(\gamma)$. Оценивая $F(\lambda)$, мы получаем $|F(\lambda)| \leq Cr_{00}^3$.

Функция $g(\gamma)$ непрерывна и уравнение $g(\gamma) = 0$ имеет по крайней мере один корень $\tilde{\gamma}_i$ внутри отрезка Γ_i , $\sqrt{\lambda_{i-1}} + \delta_{i-1} < \tilde{\gamma}_i < \sqrt{\lambda_i} - \delta_i$. Обозначим $M_1 = \min_{0 \leq i \leq k-1} |g(\sqrt{\lambda_i} + \delta_i)|$, $M_2 = \min_{1 \leq i \leq k} |g(\sqrt{\lambda_i} - \delta_i)|$. Тогда величина $\tilde{M} = \min\{M_1, M_2\}$ положительна и не зависит от α .

Если $\alpha \leq \frac{\tilde{M}}{Cr_{00}^3}$, то

$$(g(\sqrt{\lambda_{i-1}} + \delta_{i-1}) - \alpha F(\sqrt{\lambda_{i-1}} + \delta_{i-1}))(g(\sqrt{\lambda_i} - \delta_i) - \alpha F(\sqrt{\lambda_i} - \delta_i)) < 0.$$

Поскольку $g(\lambda) - \alpha F(\lambda)$ является непрерывной функцией, уравнение $g(\lambda) - \alpha F(\lambda) = 0$ имеет корень γ_i внутри Γ_i , т.е. $\sqrt{\lambda_i} + \delta_i < \gamma_i < \sqrt{\lambda_{i+1}} - \delta_{i+1}$.

Мы можем выбрать $\alpha_0 = \min\left\{A_1^2, \frac{\tilde{M}}{Cr_{00}^3}\right\}$.

Из теоремы 3 следует, что при условиях, сформулированных выше, существуют осесимметричные распространяющиеся ТЕ-поляризованные волны без затухания в цилиндрических диэлектрических волноводах кругового сечения, заполненных немагнитной изотропной средой с нелинейностью, выраженной законом Керра. Этот результат обобщает известное соответствующее утверждение для диэлектрических волноводов круглого сечения с заполнением линейной средой (при $\alpha = 0$).

Список литературы

1. **Schürmann, H. W.** TE-polarized Waves Guided by a Lossless Nonlinear Three-layer Structure / H. W. Schürmann, V. S. Serov, Yu. V. Shestopalov // Phys. Rev. E. – 1998. – V. 58, № 1. – P. 1040–1050.
2. **Валовик, Д. В.** О распространении ТМ-поляризованных электромагнитных волн в нелинейном слое с нелинейностью, выраженной законом Керра / Д. В. Валовик, Ю. Г. Смирнов // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2008. – Т. 48, № 12. – С. 2186–2194.
3. **Schürmann, H. W.** Propagation of TE-waves in Cylindrical Nonlinear Dielectric Waveguides / H. W. Schürmann, Yu. G. Smirnov, Yu. V. Shestopalov // Phys. Rev. E. – 2005. – V. 71, № 1. – P. 016614-1–016614-10.
4. **Смирнов, Ю. Г.** Распространение электромагнитных волн в цилиндрических волноводах, заполненных нелинейной средой / Ю. Г. Смирнов, С. Н. Куприянова // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2004. – Т. 44, № 10. – С. 1850–1860.
5. **Смирнов, Ю. Г.** Численное решение задачи о распространении электромагнитных ТМ-волн в круглых диэлектрических волноводах, заполненных нелинейной средой / Ю. Г. Смирнов, Э. А. Хорошева, М. Ю. Медведик // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2010. – № 1. – С. 2–13.
6. **Smirnov, Yu. G.** Boundary Eigenvalue Problem for Maxwell Equations in a Nonlinear Dielectric Layer / Yu. G. Smirnov, D. V. Valovik // Applied Mathematics. – 2010. – № 1. – P. 29–36.
7. **Валовик, Д. В.** Распространение электромагнитных ТЕ-волн в слое из нелинейного метаматериала / Д. В. Валовик // Радиотехника и электроника. – 2011. – Т. 56, № 5. – С. 589–599.

8. **Eleonskii, P. N.** Cylindrical Nonlinear Waveguides / P. N. Eleonskii, L. G. Ogan'es'yants, V. P. Silin // Soviet Physics JETP. – 1972. – V. 35, № 1. – P. 44–47.
9. **Ахмедиев, Н. Н.** Солитоны. Нелинейные импульсы и пучки / Н. Н. Ахмедиев, А. Анкевич. – М. : Физматлит, 2003.
10. **Davies, J. R.** Basic physics of laser propagation in hollow waveguides / J. R. Davies, J. T. Mendonca // Phys. Rev. E. – 2000. – V. 62, № 5. – С. 7168–7180.
11. **Romanova, E. A.** Light guiding in optical fibers with Kerr-like nonlinearity / E. A. Romanova, L. A. Melnikov, E. V. Bekker // Microwave and optical technology letters. – 2001. – V. 30, № 3. – С. 212–216.
12. **Наймарк, М. А.** Линейные дифференциальные операторы / М. А. Наймарк. – М. : Наука, 1969. – 528 с.
13. **Stakgold, I.** Green's Functions and Boundary Value Problems / I. Stakgold. – Wiley, New York, 1979. – 638 с.
14. **Треногин, В. А.** Функциональный анализ / В. А. Треногин. – М. : Наука, 1980. – 496 с.
15. **Zeidler, E.** Applied Functional Analysis / E. Zeidler. – Springer, New York, Berlin, Heidelberg, 1995. – 450 с.
16. **Лизоркин, П. И.** Курс дифференциальных и интегральных уравнений с дополнительными главами анализа / П. И. Лизоркин. – М. : Наука, 1981. – 384 с.

Смирнов Юрий Геннадьевич

доктор физико-математических наук,
профессор, заведующий кафедрой
математики и суперкомпьютерного
моделирования, Пензенский
государственный университет

E-mail: mmm@pnzgu.ru

Smirnov Yuri Gennadyevich

Doctor of physical and mathematical
sciences, professor, head of sub-department
of mathematics and supercomputer
modeling, Penza State University

Куприянова Светлана Николаевна

кандидат физико-математических наук,
доцент, кафедра математики
и суперкомпьютерного моделирования,
Пензенский государственный университет

E-mail: mmm@pnzgu.ru

Kupriyanova Svetlana Nikolaevna

Candidate of physical and mathematical
sciences, associate professor, sub-department
of mathematics and supercomputer
modeling, Penza State University

Валовик Дмитрий Викторович

кандидат физико-математических наук,
доцент, кафедра математики
и суперкомпьютерного моделирования,
Пензенский государственный университет

E-mail: dvalovik@mail.ru

Valovik Dmitry Victorovich

Candidate of physical and mathematical
sciences, associate professor, sub-department
of mathematics and supercomputer
modeling, Penza State University

УДК 517.6 + 537.874.6

Смирнов, Ю. Г.

О распространении электромагнитных волн в цилиндрических неоднородных диэлектрических волноводах, заполненных нелинейной средой / Ю. Г. Смирнов, С. Н. Куприянова, Д. В. Валовик // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2012. – № 3 (23). – С. 3–16.